

中古算书中的田地面积算法与土地制度 ——以《五曹算经》“田曹”卷为中心的考察

陈巍 邹大海

(中国科学院自然科学史研究所,北京 100010)

摘要 关注了前人少有深入探究的一些中古实用算书的特点和相关社会制度背景。通过对有关社会经济史料和算书中的田地面积算题进行纵向和横向的比较与细密的分析,指出《五曹算经》中“田曹”的面积算法具有求多而不求精的特点,与北朝田制特别是均田制下出现频繁测量、分划田地的急切需要有着密切的关系,《敦煌算书》、《夏侯阳算经》等书中田地面积算法的特点,不仅与均田制的盛衰,而且与整个社会的文化和数学的发展有关,其中后者还带有编者讲求学理和精简的意图。社会因素不仅可以影响到数学讨论的对象,还可以影响到数学知识的本身。

关键词 《五曹算经》 《敦煌算书》 《夏侯阳算经》 面积算法 均田制 中古数学与社会

中图分类号 N092·O112

文献标识码 A **文章编号** 1000-0224(2009)04-0426-11

《五曹算经》(以下简称“《五曹》”)^①是“算经十书”之一,一般认为由北周甄鸾所作,李淳风等为之作注^②。唐代史料中多有“《五曹》、《孙子》等十部算经”^[2,8,9]的说法,表明此书在“算经十书”中较受唐代官方重视。作为唐宋官方数学教育的教材,《五曹》代有刊刻传抄,受到历朝很多数学家的重视,其历史影响不可低估。另一方面,与十部算经中其他算书相比,《五曹》的编排和卷名更显著地表明它服务于相应的社会经济制度。因此,

收稿日期: 2009-03-13

作者简介: 陈巍,1985年生,河南长垣人,中国科学院自然科学史研究所硕士研究生,主要从事中国数学史研究;邹大海,1965年生,湖南新化人,中国科学院自然科学史研究所研究员,主要从事中国数学史和中国早期科学思想史研究。

- ① 本文所用版本见文献[1],以下所引《九章算术》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》等,皆据此本。
- ② 今传各本《五曹》不著作者,《新唐书·艺文志》载有甄鸾“《五曹算经》五卷”、韩延“《五曹算经》五卷”、李淳风“注《五曹》、《孙子》等算经二十卷”^[2]。戴震认为“甄韩二家皆注是书也,其作者则不知为谁”^[3]。钱宝琮根据南北朝史籍中所载诸曹名目,而认为甄鸾“编成这五卷书是无可怀疑的”^[4,5],后人多从钱宝琮说。严敦杰根据“金曹”最后一题中“九十二陌”与唐长庆元年(821年)财政制度有关,而怀疑“今本《五曹》乃唐人所纂辑,已非甄鸾所注之旧”^[6]。按,“短陌”是货币流通中铜钱不足时常见的现象,南北朝时亦有“以九十为百”甚至“以三十五为百”的情况^[7],但唐代制度在数值上与《五曹》所载算题完全吻合,严氏观点可备为一说。关于李淳风注,钱宝琮认为“传本《五曹算经》的内容浅近易晓,无须批注,实际上也没有批注”。

对《五曹》的研究有助于了解中国数学史及相关社会背景问题。然而，由于此书所载算题“解题方法都很浅近，数字计算不须要分数的概念”（[5]，99页），而被视为“稍为有些落后的”^[10]，从数学史“内史”角度来看，学者们容易认为其研究价值不高。此外，该书分为“田曹”、“兵曹”、“集曹”、“仓曹”、“金曹”五卷，每卷标题后又都有李淳风所作题解，似乎很容易就能把各卷算题同当时行政事务对应起来。所以，以往的数学史论著往往仅注意它在算法上粗略的一面^{[4][11]}。对于算题的社会背景，论说也很简略粗疏，还出现了一些误解^①。

通过仔细的比勘，我们发现《五曹》与南北朝史事有紧密联系。认真借鉴历史学界的有关研究成果，详细考察书中的内容与当时社会、经济、制度之间的联系，不仅有助于我们理解《五曹》这部实用算书本身，亦可为了解中古社会史提供新的信息。而结合社会背景考察《五曹》的数学形态，并与其前后的数学著作相比较，则有助于了解中国古代实用数学的发展脉络和特点。由于《五曹》全书涉及的史事和问题很多，本文只拟以该书“田曹”卷为中心，结合社会经济史料与数学史料，对有关问题做较为深入系统的考察。

1 对几部算书中各种形状田地面积计算的比较

田曹是南北朝时期地方各级行政机构中常见的部门^[13]。《五曹》“田曹”卷共 19 题，都是计算某种形状的田地面积。李淳风题解“生人之本，上用天道，下分地利，故田曹为首”，从算书编排次序上反映了田土和农业在古人心目中的重要地位。与宋代以前其他几部涉及田地面积计算的算书《九章算术》^②、《孙子算经》^③、《张丘建算经》^④、《敦煌算书》“均田法”^⑤^[19]及传本《夏侯阳算经》^⑥中同类算题内容进行比较，可发现描述田地形状的术语种类存在较大差别，这些术语可大致分为四类，即四边形类、三角形类、曲边形类和六边梯形类，为方便比较我们列表 1 如下（在表中分别以 I II III IV 代指前述四类术语）：

① 冯礼贵认为此书是“有关军事数学知识的系统记载”^[12]。这是不妥当的。因为军事上用到的数学有很多并不出现在《五曹》中，而且《五曹》中大量内容也并不直接涉及军事（尽管其方法可以用在包括军事在内的很多方面），其大多数卷名也未从军事上着眼。

② 今传《九章算术》约编成于公元前 1 世纪中叶。（[14]，102—105 页）

③ 成书年代约为西晋年间^[15]。

④ 依冯立昇观点^[16]，该书成书于公元 431—450 年。

⑤ 李俨先生认为包含“均田法第一”的算经是唐代的作品^[17]。尽管唐代中后期均田制已趋于消亡，但从其中所标的“均田法第一”来看，书中这部分内容应产生于均田制实施的时代。许康先生已注意到这点，并认为它与《夏侯阳算经》基本同时或略早^[18]。

⑥ 一般认为此书实为唐代韩延所作，如无特别说明，本文所称“传本《夏侯阳算经》”、“《夏侯阳算经》”皆指此书，其成书年代依李兆华观点^[20]，为公元 785 年左右。

表 1 几部算书中术语的比较

		九章算术	孙子算经	张丘建算经	五曹算经	敦煌算书	夏侯阳算经
I	方田	统称方田 ^①	有	有	有	有	有
	直田				有	有	有
	墙田				有		
	邪田	有					
	萧 ^② 田				有		
	箕田	有			有	有	有
	四不等田				有	有	有
I/II	牛角田				有	有	
II	圭田	有			有	有	有
II/III	覆月田				有		
	弧田	有		有	有		作“弓田”
III	圆田	有	有	有	有	有	有
	宛田	有					
	丘田		有		有		
	丸田						有
	环田	有			有	有	有
IV	腰鼓田				有		有
	鼓田				有	有	
	蛇田				有	有	
	总计种类	8	3	3	16	10	10

四边形类中又可分几种类型。方田与直田从《五曹》开始分别指正方形与一般矩形,其面积计算方法为广、从相乘;墙田也是正方形,《五曹》给出的问题是已知周长求其面积,方法是将周长“以四除之,自相乘”^③;邪田、箫田、箕田所利用的都是梯形面积计算公式,即“并二广,半之,以从乘之”;四不等田则是边长各不相等的四边形,其面积计算方法是“并对边之长,半之,以二位相乘”。牛角田在《五曹》中忽略了一条短边的长度,被作为三角形(或者说《五曹》只考虑属于三边形形状的牛角田情形)来计算,而在《敦煌算书》“均田法”之中则被作为四不等田来计算。覆月田、弧田在《五曹》中被近似化为三角形进行计算,但在《九章算术》和传本《夏侯阳算经》中,都用更精确的“以弦乘矢,矢又自乘,并之,二而一”的方法来计算弧田的面积;《张丘建算经》也根据同样的公式设置了逆问题。腰鼓田、鼓田和蛇田都可以视为由分居于一条公共底边两侧的两个梯形(其腰可以是直线段,也可以是曲线段)组成的六边形(我们姑且称为六边梯形)。前两者都是两头广相

① 《九章算术》本文无直田,但刘徽注有。

② 南宋本《五曹》作“箫”,郭书春校本据戴震辑录本改为“箫”。

③ 以下所述算法,多从《五曹》算题中归纳而来,与原文表述或有不同。弧田面积算法见《九章算术》卷一。

等,但腰鼓田的中央广短,而鼓田中央广长;蛇田的三广互不相同,中央广即“胸广”最长,“头广”次之,“尾广”最短。这三种田的面积算法为“并三广,以三除之,以从乘之”。这是把它化为其广为三广的平均值的长方形来处理。这种处理在多数情况下有较大的误差,所以后来杨辉在《田亩比类乘除捷法》^[21]中要批评它,并提出相当于把图形化为两个梯形来求和改进方法。

从表中可以看到,相比时代较早的几部算书尤其是《孙子算经》与《张丘建算经》,《五曹》对各种形状田地面积的计算法丰富了许多,尤其是第 I(四边形)和第 IV(六边梯形)类更是如此。而对曲边形田地面积的计算,《五曹》比起以前则没有任何发展,反而由于把弧田近似地作三角形处理,导致计算精确度下降。

2 《五曹》“田曹”卷与北朝土地制度

为什么《五曹》较之前算书会增加这么多种形状(特别是四边形和六边梯形)的田地面积算法,而又将曲边形类图形近似地化为三角形来计算面积,并有不少精确度并不高的其他算法呢?答案是,这是与北朝新推行的土地制度下,地方行政机构频繁丈量土地面积的实际需求密切相关的。其中包含以下几个要素:国家对土地的有力管理使得这种计算成为一种日常行政工作;新的土地分配制度增加了计算土地面积的工作量;在实际操作中会经常遇到要计算更多种形状田地面积的情况。

北魏初年推行“计口授田”制,实际上是一种民屯^[22],其实施办法可见于太平真君五年(444年)下令“有牛家与无牛家一人种田二十二亩,偿以私锄功七亩,如是为差;至与小、老无牛家种田七亩,小、老者偿以锄功二亩。皆以五口以下贫家为率。各列家别口数,所劝种顷亩,明立簿目。”^[23],太和元年(477年)又规定“一夫制治田四十亩,中男二十亩。”([23], 144页)这种“授田”制度可以追溯到战国时期的魏、秦等国^[24]。《九章算术》记载了多种形状田地的面积计算方法,与春秋战国时代统计土地数量、收取地租、大量开垦土地、土地买卖等活动需要测量多种形状的土地面积有密切的关系^[25],也与当时的授田制有一定的关系。由于当时数学有理论化的倾向,这就引导人们追求方法的普遍性并使获得普遍性和精确性高的算法成为可能,而在当时适应变法求强的各种要求严格的法律和规章制度,也使寻求精确度高的算法成为必要([25], 127—161页, [26]),因此《九章算术》有多种表述上具有普遍性、精度较高的田地面积计算,是不奇怪的。晋代也颁布了诸如“男子一人占田七十亩,女子三十亩”^[27]之类占田、课田等土地制度。但东汉至六朝时期,国家无力遏制豪族兼并土地,行政工作中计算土地面积的需求就降低了,这一时期对土地的丈量更多体现在买卖田地的契约中,但在晋代以前,地契中对土地各项信息的记录并不规范,各项信息往往记载非常模糊^[28]。故从实用角度而言,成书于晋代的《孙子算经》并无详细记载田地面积的计算方法的迫切需要。同样理由也适用于反映5世纪前期中原地区社会经济状况的《张丘建算经》,因为北魏前期授田制基本只推行于边境及首都平城附近^[22]。但从北魏开始,国家控制土地的力量又增强了,由此就能更有力地推行朝廷颁布的土地条令。在这一背景下,有的算书中计算田地面积的题目应当会重新增多。不过“授田”制更多的是对前朝制度的继承,将田地面积计算方法恢复到《九章算术》的数

量或许就够了,为什么《五曹》中会增加这么多描述土地形状的术语和相应的算法呢?

这种情形应该与均田制有密切关系。均田制初行于北魏^①,后代累有采用,到唐中后期废止。均田制以长期战乱造成的大量无主田、荒地为前提,虽少有触犯大官僚和士家大族的利益,但为广大下层农民获得合法土地提供了一定的保证,而且涉及的地域甚广。北魏均田制的标志性事件是太和九年(485年)颁布均田令([23], 2853—2855页),规定了农民在各种情况下受露田、桑田的数量,其中数字最大的是“诸男夫十五以上,受露田四十亩,妇人二十亩,奴婢依良。丁牛一头受田三十亩,限四牛。所授之田率倍之,三易之田再倍之,以供耕休^②及还受之盈缩”,男夫受“桑田”二十亩。而在人多地少的“狭乡”,如农民不愿迁移,所受田地数量就会少些。由于是政府主持,地方籍帐中出现大量授田及还田的记录,都对各块土地的标的、“四至”及面积有详细描述^③。算书中对田地面积计算法求多求全,与这种由国家土地管理的增强带来的规范化不无关系。另一方面,在均田制下,农民死后或年逾七十原则上要将所受露田归还给政府,实际操作中往往采取更灵活的方法,如后代可以继承前代所受桑田作为露田(“倍田”),从而使部分田地的还受在家庭内部解决等等。但无论还田采取何种形式,对于重新受田,官府依然要在户籍中进行记录。而既然对田地的各项信息都要详细记载,那么也应对田地面积进行丈量。这与此前少有涉及还田的土地制度相比,丈量田地面积不但在工作量上大大增加,而且成为地方行政部门的一项日常工作。

均田制对于土地面积的计算带来的具体影响,可概括为两方面。一方面,对土地面积的计算更频繁了,最初可能只需把大块土地划分成小块授予农民,太和九年令规定民户所受田地“不得隔越他畔”([23], 2854页),即每户所受田地应连成一片,但由于这些田地带有桑田、露田等不同性质,往往又被细分为若干段。经过农民还田官府再授田,或经过多次后代分割继承前代所分桑田等过程,这些小块土地可能会变得越来越细碎^④,而每块土地的面积都要被丈量出来,因此不仅开始时计算量大,而且频繁的计算会长期出现。另一方面,由于土地被划分为细碎的小块,由于地貌等原因,就容易出现各种形状不规则的田地^⑤。

为应付均田制带来的划分、丈量田地面积的繁重计算量,需要编辑相应的算书,提供形状足够多的田地的计算法,以便地方官吏碰到某种形状的田地,就能马上依术计算。《五曹》“田曹”卷当以为适应这种需要而编辑的算书为原型。田曹共有 19 个问题涉及 19

① 关于均田制执行的详细情况,参考文献[22], 273—276页; [29], 127—129页。

② 《魏书》“耕休”原误作“耕作”,当依《通典》校正([22], 194页)。

③ 尽管南北朝时期籍帐材料不多,但西魏大统十三年(547年)瓜州劬谷郡籍帐(S·613)^[30]应该是具有代表性的。其中记载的每块田地都有详细的四至、标的,面积大多在十亩以下。唐代出土籍帐、手实等都严格记录“新旧地段、亩数、四至”等。^[31]

④ 西魏大统十三年瓜州籍帐中每户受田多在十段以下,而唐代中期的一些户籍文书中则有很多一户的已受田达十几段和因继承导致田地分割的例证。^[32]

⑤ 如果考虑汉代买地券中已经有“四不等田”的记录,那么不规则图形的田地应当是很常见的。在籍帐材料中这种图形则不直接显示。但西魏大统十三年瓜州籍帐中,有在“一段十五亩正……正少五步”(此处“正”指正田)、“亩藁二分未足”等,这种记录有可能反映了不规则形状田地的存在。已经有史家对算书中不规则形状田地的记载有所注意,并对以往根据籍帐制作田图时只考虑正方、长方形的做法有所反思。^[33]

块田,其中面积超过1顷(100亩)的只有3块(最大的2顷60亩奇100步)。其他的田地中,超过北魏实行均田法时一个适龄男性劳动力所受桑田20亩的只有两块,大于10亩小于20亩的田5块,大于1亩小于10亩的田地6块,低于1亩的田地3块,其中最小的为63步。考虑到北魏时还有一些大户、官员受田都以顷计,《五曹》中出现3块超过一顷的田地是可以理解的。余下的16块田地,最大的也只有63亩奇80步,只比一对壮年夫妇所受露田之和60亩稍多一点,还不及一对有牛夫妇所应受的露田数;次大的只有23亩奇150步,也只略多于一壮年妇女所应受露田额20亩、而远小于一个壮年男子所应受的露田额40亩。其他的14块田都小于20亩。如果根据距离《五曹》编成年代更近的西魏大统十三年瓜州籍帐,则可看出民户所受每段田地面积都小于20亩,大多数都在10亩以下,而“田曹”卷的19块田中20亩以下面积的田地就有14块,从题目涉及数量上看,这些算题和相应的方法适合于官吏进行学习并付诸应用。同时“田曹”卷收集了形状种类尽可能多的田地算法,可以满足北魏授田与均田法需要关于各种形状田地的面积算法之要求。范围广泛、频繁进行的计算工作,也使得所需要的大量官吏无暇在精细算法上下功夫,而均田制在北朝还属初创阶段,由于战乱又时废时兴,在工作中难免带有一些粗放和原始的特点,因此《五曹》中有些算法不太精确,是可以理解的。

下面,我们将对这些精确度不高的算法进行具体讨论。

(1)由半对角线求正方形田的面积。“田曹”卷第11题,由正方形田的中心到一个顶点的距离(对角线之半)求其面积,其方法为先求对角线,再求正方形的边长,然后自乘。这个问题与《孙子算经》卷上第14题的题设、数字和解法都相同,只是文字稍异。在《九章算术》的“少广”章,专门介绍了开方术,可由面积求出正方形的边长。《孙子算经》卷上第19题和《张丘建算经》卷中的倒数第4题也是由方田(正方形)面积用开方法求其边长。这种利用开方的方法原则上可以求出精确值。但《五曹》和《孙子》在求边长时,没有用到开方术,而是根据边长与对角线之比为5:7的近似比率^①,用比例方法求出边长。对于这类问题,古代可能想到的精确算法有两种。一种是利用勾股定理,由对角线用开方法求出边长,再由边长自乘,得到面积。另一种是利用出入相补原理,可以得知对角线上的正方形面积(对角线的平方)等于两个边长上的正方形的面积(边长的平方)之和,因此可以由对角线自乘,再除以2得到这块田的面积。《五曹》和《孙子》所用算法求出的面积(一顷八十三亩奇一百八十步)比实际面积(一顷八十亩奇十八步)大三亩奇一百六十二步。不使用早几百年就已出现,且时代稍早的算书、甚至同一部算书中仍在使用的精确算法,这种做法说明《五曹》和《孙子》记载的是一种更原始的算法,而其编者并没有根据早已改进的算法来纠正它。我们上面所述的第二种精确算法,需要较多的抽象化和理论化方面的考虑,不容易想到。第一种精确算法需要用到开方,无疑比较复杂、难以掌握,远不如书中所载近似算法那么直截了当,易为一般基层官吏所掌握。

(2)四不等田。土地方位通常用“四至”来描述,如果土地面积较大,对丈量精确度又要求不高,一些形状与矩形相去不太远的田地,就能将其近似地作为矩形来处理,这样方田的计算方法通常就能够满足需求。但现实中肯定还存在大量与矩形相差很远的田地,

从早期出土文献中能够发现关于不规则四边形的记录。例如汉代买地券中有“南广九十四步,西长六十八步,北广六十五,东长七十九步,为田二十三亩奇百六十四步”^[34],买地券中出现的土地未必真实存在,但从计算结果来看汉代恐怕还没有推行后代计算四不等田面积的通用公式,因为用包括《五曹》在内的后世几部算书中统一的算法去计算前述土地面积,并不能算出相同得数;不过,既然东汉已经有了对这种四不等田及其面积的描述,那么《五曹》、《敦煌算书》“均田法”和《夏侯阳》都统一采用的算法(两组对边平均值的乘积),很可能在早于这些算书的时代就已经出现,只是未见于现存的几部更早的算书而已。

(3)在曲边形田地的面积计算上,《五曹》较前代算书,几乎没有任何进展。即使这类土地本来难以有所变化,也应把一大原因归结为在土地丈量的实际操作中,碰到曲边形土地的机会要远小于四边形土地,而精确计算此类图形面积的方法对于有些地方行政工作者来说,不仅有些高深,而且比较麻烦费事。故《五曹》将弧田、覆月田中的曲边,都按直边对待,而将这两种图形,都近似化为三角形来计算面积。这种做法无疑降低了计算的准确性,却简化了运算步骤,方便文化程度不高的下级官吏掌握。

(4)对于六边形梯形,《五曹》有3种,在上列算书中是包含类别最多的,而这在早于它的算书中一种都没有,晚于它的《敦煌算书》和《夏侯阳算经》只分别有2种和1种。在现实中,这种长条形状的田是很多的。它们本可以通过分为两个梯形分别计算其面积、然后求和来解决,但《五曹》却采用了另一条思路:先算出三广的平均值,再乘以从。这种算法说明造术者的思路是把这种图形化为矩形来计算,这与三角形田和梯形田的求积法有相似性:对特殊的广进行平均(对梯形是把两广求其平均,对三角形则视为一广为零的梯形来处理,对六边形则是三广平均),可以代替各广,他(们)还没有认识到这种代替只适用于一些特殊形状的图形。《五曹》关于这些图形的求积法的思想基础,是面积由一系列线段积累而成的观念。这种观念是很自然的思想,在先秦文献中已经存在([25], 375—376, 387—389页),在《九章》及其刘徽注也用到了^[14]。当考虑不严密时,古人很容易想到用几条特殊的广的平均值作为诸广的代表([25], 506页)。因此,尽管《五曹》中六边形梯形的求积法不见于现存早于它的其他算书,但它们未必都由《五曹》那些问题的作者首先提出。《五曹》提出或采用这些精度不高的六边形梯形的面积算法,说明它适应现实急务的需要:毕竟这种算法比分为两个梯形来计算,要简便得多,也便于大量基层官吏学习和掌握。

总之,《五曹》中出现的形状种类繁多的田地面积算法,是北朝田地制度下行政部门需要频繁划分、丈量土地的形势对相应的计算工具的必然要求,而其中采用一些精度不高的算法,则不仅与均田制刚刚创立、还不够完善有关,而且也由于这些算法比更精确的算法简单便捷、更易于基层官吏掌握,同时又可以满足大范围的频繁测量与计算有关。唐代田曹的职能“掌园宅、口分、永业及荫田”([2], 1313页)^①,需要测算各种田地面积,正与《五曹》“田曹”中的问题所讨论的对象非常吻合,由于北周与唐代制度有密切联系,而

① 见于《新唐书》而不见于《唐六典》卷三十中对州府各曹的记载;实际上唐代田曹是分户曹之职另立,不常置^[35]。唐代“口分”即北朝之“露田”,代表国有土地。

均田制从北魏到唐中期都有施行，在服务于行政管理的算书中，将计算田地面积的题目列于“田曹”名目之下，是非常恰当的。

3 后世算书中田地算法的变化

从前表可以看出，《五曹》与《敦煌算书》“均田法”、传本《夏侯阳算经》有关田地计算的问题比较接近。以编纂角度来说，《五曹算经》中将这些算题编入“田曹”卷，《敦煌算书》明确表明此类算题服务于均田制，而《夏侯阳算经》中此类算题都编在卷上“论步数不等”节中田曹名目之后，可以说，这三部书中关于田地面积计算的题目，都与地方行政部门的实际需要密切相关。

在《敦煌算书》“均田法”所载 10 道算题中^①，前 4 题，即方田、直田、员（通“圆”）田的算题形式同《五曹》，只依托具体数字提出算法而没有抽象的术文；而后 6 题，即蛇（通“蛇”）田、环田、角田、箕田、圭田、鼓田，都在答案后先叙述具有普遍意义的术文，再记录具体的演算，这无疑是对《五曹》的补充和改进。在算法上敦煌算书比《五曹》有所进步的是关于“角田”的计算。《五曹》中的“牛角田”，被近似为三角形来计算，测量参数只有从、口广两个量，这和“覆月田”只测从、径两个量，然后按照三角形来计算面积的方法实际上是类似的，二者完全可以相互替代。而《敦煌算书》中，尽管对“角田”的描述依然为“如牛角”，但又说这种形状“本粗末细，外曲长，内曲短”，即这种角田的末端是有一定长度的，其面积计算也需测定南头、北头、内曲、外曲四个量，之后按照四不等田的算法计算面积。《五曹》牛角田固然确实可以是一头无广，角田近似为三角形也并非不能接受，但《敦煌算书》注意到两头都有广的曲四边形，并近似作为四边形，用四不等田的方法计算面积，不仅是田地形状种类的扩充，也表明四边形类型在均田制下进一步成为面积计算的主体。

《夏侯阳算经》则较《五曹》和“均田法”有了更大的发展。其所载各种形状田地的面积计算方法，都只记录了抽象性的术文，甚至没有出现具体数字。尽管《夏侯阳算经》所载算题也与行政需求有关，但它所面对的读者，必然比另外两部算书的读者具有更高水平的抽象思维能力。唐代重视算学教育，不仅国子监有算馆培育算学人材，科举中也有明算科取士的制度，所培养人才只被“于从九品下叙排”^[36]，属于最低品秩，其出路应主要是低级官吏，因此唐代官吏的算学素养应会高于北朝官吏。这也表明，我们虽可根据《五曹》、敦煌算书、《夏侯阳算经》中抽象性术文的依次增加，而评价《夏侯阳算经》比《五曹》有更高的水平，但不可据此认为《五曹》的编者甄鸾的数学水平低于后两部书的编作者。因为甄鸾曾为《九章算术》等众多算书作注，其数学水平也不会太低，通晓《九章算术》中有关各种田地计算的术文当不在话下。《五曹》没有采用抽象性强的术文，说明此书绝大

① 本文所用《敦煌算书》“均田法”是李俨先生^[37]将分藏于法国巴黎和英国伦敦的两部分^[19]互相参照而整理出来的，两部分都有残损，或许佚失了一些原本存在的内容，但从算题排列来看，其田地的形状种类还是比《五曹》少。退一步说，即使它的田地形状更多，也仍与均田制导致相关算书对田地面积算法求多而不求精的观点一致。由于时间晚些，比《五曹》有所改进也是自然的。

部分算题并不是他本人撰写的,而是他根据已有算题或以前的算书文本进行了编辑,上面提到的《五曹》中有一个与《孙子》相同的算题就是一个例子。如前所述,均田制下大范围地域内频繁丈量各种形状的土地,需要快速培养大量能够应用各种田地面积算法的官吏,因此《五曹》中收有形状种类尽可能多的计算田地面积的问题和方法,而并未过多追求算法上的精确性,它不仅没有采用抽象表达的术文,甚至也没有采用某些前朝已有的先进算法,而宁可使用更原始但易于掌握的方法。总之,甄鸾或《五曹》“田曹”卷原型的编者主要是收集和编辑整理而不是撰写,他(们)做这种工作不在于体现数学成就和数学水平,而在于满足推行不久的均田制下行政管理的迫切需要。随着国家数学教育制度和科举制中明算考试的推动,以及整个社会文化的发展,基层官吏的数学水平提高,容易接触到的《九章算术》弧田算法已不显得那么复杂,而容易为人所接受。况且这种算法得出的结果要比用《五曹》所得的结果更大,在以授田面积决定田租额的制度下,它无疑对政府更有利。因此《夏侯阳算经》在一定程度上恢复对先进算法的使用,并对算法进行抽象性概括,是很自然的。

4 结 语

总之,中古时代算书中的田地面积算法,与编作者的目标有密切关系。刘徽主要为《九章》作注,他不必突破原有的框架增加新的实际问题。《孙子算经》和《张丘建算经》是个人著作,主要体现个人研究和学习兴趣,对田地面积的计算关注不多,涉及的田地形状也很少。如《张丘建算经》虽有四个问题、涉及三种形状的田地,但作者的意图主要在于说明开方法,而不是计算面积,这从问题设计本身和术文中“开方除之”的说法,及前三个问题(方田、圆田)的草详述开方步骤等方面,可以明显地看得出来(最后的弧田问题没有草,想必是前面对开方已经有详细的介绍,不需要再做详释了)。

在北魏实行授田制,以及中古均田制推行初期的实际工作中,需要针对各种形状的田地面积算法,这就促成了有关部门或官员尽可能多的收集各种田地的计算方法,而对精确要求不高。因此,甄鸾编辑《五曹》“田曹”卷,求量多而不求精准,能够较好地满足这种需求。而随着这一土地制度和社会文化的发展,特别是隋唐数学教育和明算科举的制度之推动,基层官吏的计算水平也逐渐提高,计算方法的普遍性和精确性就受到了更多的关注,这从《敦煌算书》“均田法”和传本《夏侯阳算经》有关题目较《五曹》“田曹”卷的进步就可看出,同时《夏侯阳算经》的序言表明作者编纂该书时有“明数造术”、“纂定精研,刊繁就省”^①的意图,因此书中关于田地计算主要只录抽象的术文,且恢复比《五曹》更精准的《九章算术》成法。

唐代中后期,均田制逐渐废弃,而地方行政体制中田曹这一部门,也逐渐演化成虚衔,最后从制度中消失^[35]。韩延编纂传本《夏侯阳算经》的时代,均田制在不断衰落,书中虽提到田曹,但未用独立成卷的方式介绍相应的算法,而只在“论步数不等”节中对一些田地面积的算法做一简单归纳。宋代虽仍以《五曹》作为算馆的教材,但它所受到的重视程

度有所下降,这不仅因为其所载算法粗略简单,也是它实用价值逐渐降低的结果。从上面的讨论还可以看到,算书和社会经济背景可以互相印证,不仅一项经济政策的实施,可能需要相应的数学知识为支撑,而且算书中算法的选用、表达方式等“内史”问题,除受作者的意图、能力等影响外,亦可能受到社会因素的左右。本文对中古算书中田地算法与田地制度关系的研讨,不失为一个很好的例证。

参 考 文 献

- 1 郭书春,刘钝. 算经十书 [M]. 沈阳:辽宁教育出版社, 1998.
- 2 (宋)欧阳修,等. 新唐书 [M]. 第 59 卷. 北京:中华书局, 1975. 1545—1546.
- 3 (清)戴震. 校书提要 [A]. 戴震全集 [Z]. 第 6 册. 合肥:黄山书社, 1995. 637.
- 4 钱宝琮. 算经十书 [M]. 北京:科学出版社, 1963. 409—410.
- 5 钱宝琮. 中国数学史 [A]. 李俨钱宝琮科学史全集 [Z]. 第 5 卷. 沈阳:辽宁教育出版社, 1998. 99—100.
- 6 严敦杰. 南北朝算学书志 [J]. 李俨注. 图书季刊, 1940, 2(2): 196—212.
- 7 (唐)魏征,等. 隋书 [M]. 第 24 卷. 北京:中华书局, 1973. 690.
- 8 (宋)王溥. 唐会要 [M]. 第 66 卷. 北京:中华书局, 1955. 1163.
- 9 (后晋)刘昫,等. 旧唐书 [M]. 第 79 卷. 北京:中华书局, 1975. 2719.
- 10 (英)李约瑟. 中国科学技术史·数学卷 [M]. 《中国科学技术史》翻译小组译. 北京:科学出版社, 1978. 74.
- 11 纪志刚. 南北朝隋唐数学 [M]. 石家庄:河北科学技术出版社, 2000. 131—133.
- 12 冯礼贵. 甄鸾及其《五曹算经》[A]. 吴文俊主编. 中国数学史论文集(二) [C]. 济南:山东教育出版社, 1986. 29—38.
- 13 严耕望. 魏晋南北朝地方行政制度 [J]. 中央研究院历史语言研究所专刊之四十五 B. 中国地方行政制度史乙部, 1990. 281, 571—572, 621, 635.
- 14 郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽 [M]. 济南:山东科学技术出版社, 1992. 259.
- 15 严敦杰. 《孙子算经》研究 [J]. 学艺, 1936, 16(7): 15—32.
- 16 冯立昇. 《张邱建算经》的成书年代问题 [A]. 李迪主编. 数学史研究文集 [C]. 第 1 辑. 呼和浩特:内蒙古大学出版社, 1991. 46—49.
- 17 李俨. 唐代算学史 [A]. 中算史论丛 [C]. 第 5 集. 北京:科学出版社, 1955. 15—56.
- 18 许康. 敦煌算书透露的社会与科技信息 [J]. 敦煌研究, 1989, (1): 97—103.
- 19 敦煌算书“均田法”并序 [A]. (P·3349, S·5779). 中国科学技术典籍通汇·数学卷 [Z]. 第 1 册. 郑州:河南教育出版社, 1993. 414.
- 20 李兆华. 传本《夏侯阳算经》成书年代考辨 [J]. 自然科学史研究, 2007, 26(4): 551—556.
- 21 杨辉. 田亩比类乘除捷法 [A]. 续修四库全书 [Z]. 第 1042 册. 上海:上海古籍出版社, 2004. 11—22.
- 22 高敏. 魏晋南北朝社会经济史探讨 [M]. 北京:人民出版社, 1987. 223—234.
- 23 (北齐)魏收. 魏书 [M]. 第 4 卷下. 北京:中华书局, 1974. 109.
- 24 杨宽. 战国史(增订本) [M]. 上海:上海人民出版社, 2003. 160—163.
- 25 邹大海. 中国数学的兴起与先秦数学 [M]. 石家庄:河北科学技术出版社, 2001. 127—134.
- 26 邹大海. 睡虎地秦简与先秦数学 [J]. 考古, 2005, (6): 57—65.
- 27 (唐)房玄龄,等. 晋书 [M]. 第 26 卷. 北京:中华书局, 1974. 790.
- 28 张传玺. 契约史买地券研究 [M]. 北京:中华书局, 2008. 68.
- 29 唐长孺. 魏晋南北朝隋唐史三论 [M]. 武汉:武汉大学出版社, 1992. 127—129.
- 30 (日)池田温. 中国古代账籍研究 [M]. 龚泽铎译. 北京:中华书局, 2007. “录文与插图”6—22.
- 31 唐神龙三年(707年)正月西州高昌县开党等寺手实 [A]. 荣新江,等. 新获吐鲁番出土文献 [C]. 北京:中华书局, 2008. 53.

- 32 邢铁. 从三组敦煌户籍说唐代均田制下的继承问题 [A]. 张国刚主编. 中国中古史论集 [C]. 天津:天津古籍出版社, 2003. 63—74.
- 33 朱雷. 唐代“均田制”实施过程中“受田”与“私田”的关系及其他 [A]. 武汉大学历史系魏晋南北朝史研究室编. 魏晋南北朝隋唐史资料 [C]. 第 14 辑. 武汉:武汉大学出版社, 1997. 80—85.
- 34 (日)池田温. 中国历代墓券略考 [A]. 东洋文化研究所纪要 [C]. 第 86 册“创立四十周年纪念论集”. 1981(昭和五十六年). 214.
- 35 赖瑞和. 唐代基层文官 [M]. 北京:中华书局, 2008. 178.
- 36 (唐)李林甫, 等. 唐六典 [M]. 北京:中华书局, 1992. 45.
- 37 李俨. 中国古代数学史料 [A]. 李俨钱宝琮科学史全集 [C]. 第 2 卷. 沈阳:辽宁教育出版社, 1998. 52—55.

Methods of Area Calculation in the Mathematical Books and the Land System of Mid-Ancient China

CHEN Wei ZOU Dahai

(Institute for the History of Natural Science CAS Beijing 100010, China)

Abstract By comparing the problems concerning area calculation among several mathematics book with each other and analyzing the land policies in the Mid-Ancient Period, this article points out that the Wucao Suanjing seeks extensiveness more than accuracy in the methods of area calculation, and this characteristic is closely related to the Equal Field System (Juntian System), which made the fields to be frequently measured and frequently divided into smaller ones as well. These methods became more exact and classified in such subsequent mathematical books as Dunhuang Suanjing and Xiahou Yang Suanjing. When the latter book was compiled, the Equal Field System had declined. The article indicates that social elements can influence not only the objects dealt with mathematics, but also influence the expression of the mathematical texts.

Key words Wucao Suanjing, Dunhuang Suanjing, Xiahou Yang Suanjing, methods of area calculation, the Equal Field System (Juntian System), social context of mathematics